

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه هشتم

فصل سوم

دوگان

3

شرایط مکمل زائد

فرم ماتریسی مسائل اولیه (P) و دوگان (D) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} P: \quad & \min \quad z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad & \max \quad Y = yb \\ \text{s.t.} \quad & yA \leq c, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

فرم استاندارد این دو مسئله، با تبدیل محدودیت ها به تساوی، به دست می آید::

$$\begin{aligned} P: \quad & \min \quad z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax - Is = b, \\ & x \geq 0, s \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad & \max \quad Y = yb \\ \text{s.t.} \quad & yA + wI = c, \\ & y \geq 0, w \geq 0. \end{aligned}$$

4

تحقیق در عملیات

توجه نمایید که برای هر متغیر اصلی مانند x_j در مسئله P ، یک محدودیت در مسئله D ، تعریف شده و متغیر کمکی اضافه شده به آن محدودیت، w_j است. برعکس، برای هر متغیر اصلی y_i از مسئله D ، نیز یک محدودیت در مسئله P با متغیر کمکی s_i داریم.

ارتباط بین متغیرهای اصلی یک مسئله و متغیرهای کمکی مسئله دیگر که در بهینگی این مسائل رخ می دهد، به شرایط مکمل زائد معروف است که در واقع، نتیجه مستقیم اصل ناظر و تساوی مقادیر بهینه تابع هدف می باشد.

5

تحقیق در عملیات

فرض کنید $(\bar{x}, \bar{s})$ و $(\bar{y}, \bar{w})$ به ترتیب جواب های **بهینه** مسائل اولیه و دوگان استاندارد باشند.

$$\begin{cases} \bar{y}_i \bar{s}_i = 0, & \forall i \\ \bar{w}_j \bar{x}_j = 0, & \forall j \end{cases}$$

و بیان می کند که حاصلضرب مقدار بهینه هر متغیر اصلی یک مسئله و مقدار بهینه متغیر کمکی محدودیت نظیر آن در مسئله دیگر، برابر صفر است و این یعنی، حداقل یکی از آن دو برابر صفر هستند. به عبارت ساده تر، اگر مقدار بهینه یکی از متغیرهای اصلی یک مسئله، ناصفر باشد، آنگاه مقدار بهینه متغیر کمکی محدودیت نظیر آن متغیر در مسئله دیگر، برابر صفر است. در نتیجه، آن محدودیت به صورت تساوی برقرار بوده و جواب بهینه مسئله دوم، روی آن قرار دارد.

$$\begin{aligned} P: \quad & \min \quad z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax - Is = b, \\ & x \geq 0, s \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad & \max \quad Y = yb \\ \text{s.t.} \quad & yA + wI = c, \\ & y \geq 0, w \geq 0. \end{aligned}$$

6

تحقیق در عملیات

قضیه مکمل زائد که شرایط بهینگی برای مسائل اولیه و دوگان را بیان می کند، به صورت زیر است:

قضیه ۳-۶: فرم استاندارد مسائل اولیه (P) و دوگان (D) را به صورت فوق در نظر بگیرید. $(\bar{X}, \bar{S})$ و $(\bar{Y}, \bar{W})$ به ترتیب جواب های بهینه مسائل اولیه و دوگان هستند، هرگاه سه شرط زیر رخ دهند:

۱. $(\bar{X}, \bar{S})$ برای مسئله P شدنی باشد (شدنی بودن اولیه).

۲. $(\bar{Y}, \bar{W})$ برای مسئله D شدنی باشد (شدنی بودن دوگان).

۳. برای هر i و j داشته باشیم $\bar{y}_i \bar{s}_i = 0$ و $\bar{w}_j \bar{x}_j = 0$ (شرایط مکمل زائد).

7

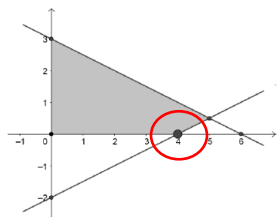
تحقیق در عملیات

مثال ۳-۷. مسائل اولیه و دوگان زیر را در نظر بگیرید.

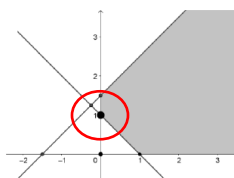
$$\begin{aligned} P: \quad \max \quad z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D: \quad \min \quad Y &= 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.} \quad y_1 + y_2 &\geq 1, \\ 2y_1 - 2y_2 &\geq -3, \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ناحیه شدنی این دو مسئله در شکل زیر رسم شده و تمام نقاط گوشه ای آن مشخص شده اند. همچنین، نقطه گوشه ای بهینه مسئله نیز از مابقی نقاط گوشه ای، بزرگتر است.



ناحیه شدنی مسئله P



ناحیه شدنی مسئله D

8

تحقیق در عملیات

فرم استاندارد این دو مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ll}
 P: \quad \max & z = x_1 - 3x_2 \\
 \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 + s_1 = 6, \quad \leftarrow y_1 \\
 & x_1 - 2x_2 + s_2 = 4, \quad \leftarrow y_2 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 D: \quad \min & Y = 6y_1 + 4y_2 \\
 \text{s. t.} & y_1 + y_2 - w_1 = 1, \quad \leftarrow x_1 \\
 & 2y_1 - 2y_2 - w_2 = -3, \quad \leftarrow x_2 \\
 & y_1, y_2, w_1, w_2 \geq 0.
 \end{array}$$

شرایط مکمل زائد:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 w_1 = 0 & y_1 s_1 = 0 \\
 x_2 w_2 = 0 & y_2 s_2 = 0
 \end{array}$$

9

تحقیق در عملیات

جواب های پایه مسائل اولیه و دوگان و مقدار تابع هدف به ازای نقاط شدنی

مسئله اولیه		مسئله دوگان	
مختصات جواب (x_1, x_2, s_1, s_2)	مقدار تابع هدف Z	مختصات جواب (y_1, y_2, w_1, w_2)	مقدار تابع هدف Y
(4, 0, 2, 0)	4	$\leftrightarrow$ (0, 1, 0, 1)	4
(5, 1/2, 0, 0)	7/2	$\leftrightarrow$ (-1/4, 5/4, 0, 0)	نشدنی
(0, 3, 0, 1)	-9	$\leftrightarrow$ (-3/2, 0, -1/2, 0)	نشدنی
(0, 0, 6, 4)	0	$\leftrightarrow$ (0, 0, -1, 3)	نشدنی
(6, 0, 0, -1)	نشدنی	$\leftrightarrow$ (1, 0, 0, 3)	6
(0, -2, 10, 0)	نشدنی	$\leftrightarrow$ (0, 3/2, 1/2, 0)	6

$$x_1 w_1 = 0 \quad x_2 w_2 = 0 \quad y_1 s_1 = 0 \quad y_2 s_2 = 0$$

10

تحقیق در عملیات

پیدا کردن جواب بهینه دوگان به کمک جواب بهینه مسئله اولیه

با توجه به نسبی بودن نام های اولیه و دوگان و بدون کم شدن از کلیت، فرض می کنیم مسئله اولیه دارای جواب بهینه باشد. با توجه به قضیه ۳-۵، می توان نتیجه گرفت که مسئله دوگان نیز جواب بهینه دارد. به کمک شرایط مکمل زائد و تساوی مقدار بهینه تابع هدف دو مسئله، می توان مقادیر بهینه متغیرهای مسئله دوگان را به دست آورد. مثال زیر این مطلب را نشان می دهد.

11

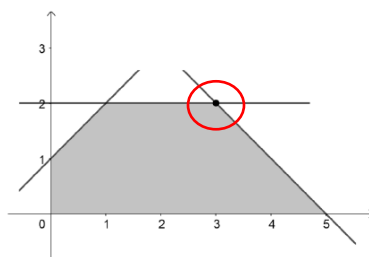
تحقیق در عملیات

مثال ۳-۸. مسئله اولیه (P) زیر و دوگان آن (D) را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll}
 P: & \max \quad z = x_1 + 2x_2 \\
 & \text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 \leq 1, \\
 & \quad \quad x_2 \leq 2, \\
 & \quad \quad x_1 + x_2 \leq 5, \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \\
 D: & \min \quad Y = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\
 & \text{s.t.} \quad -y_1 + y_2 \geq 1, \\
 & \quad \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\
 & \quad \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0.
 \end{array}$$

ناحیه شدنی مسئله اولیه در شکل زیر رسم شده و با حل مسئله به روش ترسیمی، جواب بهینه آن نقطه

گوشه ای (۳،۲) با مقدار تابع هدف $Z^* = 7$ است.



12

تحقیق در عملیات

فرم استاندارد مسئله اولیه، را می نویسیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + s_1 = 1, \\ & x_2 + s_2 = 2, \\ & x_1 + x_2 + s_3 = 5, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر بهینه متغیرهای x_1 و x_2 در محدودیت های فرم استاندارد مسئله اولیه، مقدار بهینه متغیرهای کمکی آن نیز به دست می آید. بنابراین:

$$(x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (3, 2, 2, 0, 0), \quad Z^* = 7.$$

13

تحقیق در عملیات

اکنون به یافتن جواب بهینه مسئله دوگان می پردازیم.

ابتدا فرم استاندارد مسئله دوگان را می نویسیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Y = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 - w_1 = 1, \\ & y_1 + y_2 + y_3 - w_2 = 2, \\ & y_1, y_2, y_3, w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

با توجه به جواب بهینه مسئله اولیه و به کمک شرایط مکمل زائد، داریم:

$$w_1^* = 0 \quad \text{در نتیجه} \quad x_1^* > 0. \quad 1.$$

$$(x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (3, 2, 2, 0, 0) \quad w_2^* = 0 \quad \text{در نتیجه} \quad x_2^* > 0. \quad 2.$$

$$y_1^* = 0 \quad \text{در نتیجه} \quad s_1^* > 0. \quad 3.$$

مقادیر به دست آمده را در محدودیت های مسئله دوگان استاندارد جایگزین کرده و داریم:

$$\begin{cases} y_2 = 1 \\ y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

14

تحقیق در عملیات

با حل دستگاه فوق، جواب بهینه مسئله دوگان و مقدار بهینه تابع هدف آن به صورت زیر به دست می آید:

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*, w_1^*, w_2^*) = (0, 1, 1, 0, 0), \quad Y^* = 7.$$

15

تحقیق در عملیات

قیمت های سایه و تفسیر اقتصادی دوگان

از بحث مدل سازی می دانیم که میزان تولید محصولات، به موجودی مواد اولیه وابسته است و در نتیجه، تغییر بردار سمت راست محدودیت ها، احتمالاً منجر به تغییر جواب بهینه و سود به دست آمده خواهد شد. حال، سوالی که پیش می آید این است که اگر موجودی یک ماده اولیه افزایش یابد، میزان تولید محصولات و سود حاصل از فروش آن ها چه تغییری خواهد کرد.

برای پاسخ به این سوال، قیمت سایه را تعریف می کنیم.

16

تحقیق در عملیات

تعریف قیمت سایه

مسائل اولیه (P) و دوگان (D) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll}
 P: & \max \quad z = cx \\
 & \text{s. t. } Ax \leq b, \\
 & \quad x \geq 0. \\
 D: & \min \quad Y = yb \\
 & \text{s. t. } yA \geq c, \\
 & \quad y \geq 0.
 \end{array}$$

17

تحقیق در عملیات

اگر مسئله اولیه، دارای جواب بهینه غیرتبهگن مانند X^* با مقدار تابع هدف Z^* باشد، آنگاه مسئله دوگان نیز جواب بهینه ای مانند Y^* با همان مقدار تابع هدف را دارد که هر مؤلفه آن متناظر یکی از محدودیت های مسئله اولیه است. اگر Y_i^* متناظر محدودیت نام با مقدار سمت راست b_i باشد، Y_i^* را قیمت سایه این محدودیت می نامند. در حالت کلی نیز بردار Y^* ، قیمت های سایه بردار سمت راست نامیده می شود. بنابراین، قیمت های سایه در یک مسئله برنامه ریزی خطی، مقادیر بهینه متغیرهای دوگان آن مسئله

هستند.

18

تحقیق در عملیات

در مسئله اولیه فوق، افزایش مقدار سمت راست محدودیت ها ممکن است منجر به بزرگتر شدن ناحیه شدنی مسئله شده و به بهبود تابع هدف کمک کند. اگر سمت راست محدودیت $\bar{a}_m$ ، یک واحد افزایش یابد، آنگاه مقدار تابع هدف مسئله به اندازه قیمت سایه آن محدودیت، یعنی y_i^* ، افزایش خواهد یافت. به عبارت دیگر، اگر در مسئله اولیه، b_i به $b_i + 1$ افزایش یابد، مقدار بهینه تابع هدف نیز از Z^* به $Z^* + y_i^*$ افزایش خواهد یافت. در این حالت، y_i^* حداکثر سودی است که می تواند با اضافه شدن یک واحدی ماده اولیه $\bar{a}_m$ ، به دست آید.

19

تحقیق در عملیات

اگر در بهینگی مسئله اولیه، موجودی ماده اولیه $\bar{a}_i$ به صفر نرسیده باشد، افزایش این ماده اولیه، منجر به افزایش تولید و سود نخواهد شد. زیرا، مقدار بهینه متغیر کمکی آن محدودیت در مسئله اولیه یعنی s_i^* ، ناصفر است و طبق قضیه مکمل زائد، مقدار متغیر دوگان مربوط به آن باید برابر صفر باشد یعنی، $y_i^* = 0$.

توجه: اگر مقدار b_i به $b_i - 1$ کاهش یابد، مقدار بهینه تابع هدف نیز از Z^* به $Z^* - y_i^*$ کاهش خواهد یافت و این یعنی، کاهش موجودی مواد اولیه، می تواند منجر به کاهش تولید و در نتیجه کاهش سود شود.

20

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۱۰. فرض کنید سه محصول ۱، ۲ و ۳، به کمک دو ماده اولیه A و B ساخته شده و سود حاصل از فروش هر واحد از این محصولات، به ترتیب ۴، ۶ و ۵ واحد است. تعداد مورد نیاز از هر ماده اولیه برای ساختن محصولات و همچنین، موجودی هر یک از مواد اولیه در جدول زیر آورده شده است.

مواد اولیه	تعداد مورد نیاز برای ساختن محصول ۱	تعداد مورد نیاز برای ساختن محصول ۲	تعداد مورد نیاز برای ساختن محصول ۳ (مقدار در دسترس)	موجودی
ماده اولیه A	۱	۳	۱	۲۴
ماده اولیه B	۱	۱	۵	۱۲

مدل برنامه ریزی ریاضی زیر، میزان تولید محصولات را به گونه ای پیدا می کند که سود حاصل از فروش آنها ماکزیمم شود:

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24,$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 12,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

21

تحقیق در عملیات

که در آن، متغیرهای x_1 ، x_2 و x_3 به ترتیب میزان تولید محصولات ۱، ۲ و ۳ هستند. جواب بهینه این مسئله به صورت $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*) = (6, 6, 0, 0, 0)$ بوده و $Z^* = 60$ حداکثر سود حاصل را نشان می دهد.

دوگان این مسئله به فرم زیر است:

$$\min Y = 24y_1 + 12y_2$$

$$\text{s. t. } y_1 + y_2 \geq 4,$$

$$3y_1 + y_2 \geq 6,$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 5,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

جواب بهینه دوگان نیز به صورت $(y_1^*, y_2^*, w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (1, 3, 0, 0, 11)$ و $Y^* = 60$ است.

22

تحقیق در عملیات

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \quad \leftarrow y_1 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 12 \quad \leftarrow y_2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$\min Y = 24y_1 + 12y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 + y_2 \geq 4,$$

$$3y_1 + y_2 \geq 6,$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 5,$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

$$(y_1^*, y_2^*) = (1, 3)$$

23

تحقیق در عملیات

$(y_1^*, y_2^*) = (1, 3)$ قیمت های سایه مربوط به محدودیت های مسئله اولیه هستند. بنابراین، نتایج زیر

به دست می آید:

- $y_1^* = 1$ به این معنی است که اگر سمت راست محدودیت اول در مسئله اولیه، یعنی موجودی ماده

اولیه A، یک واحد افزایش یابد، مقدار تابع هدف بهینه آن (سود حاصل) یک واحد افزایش خواهد

یافت.

- $y_2^* = 3$ به این معنی است که اگر سمت راست محدودیت اول در مسئله اولیه، یعنی موجودی ماده

اولیه B، یک واحد افزایش یابد، مقدار تابع هدف بهینه آن (سود حاصل) سه واحد افزایش خواهد

یافت.

24

تمرینات قسمت هشتم

(۱) مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به روش ترسیمی حل کنید. (مسئله اولیه)

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 &\leq 10, \\ x_1 &\leq 7, \\ x_2 &\leq 7, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ابتدا دوگان آن را بنویسید. سپس، به کمک جواب بهینه مسئله اولیه، جواب بهینه مسئله دوگان را به دست آورید. (مشابه مثال ۳-۸ جزوه)

(۲) برای تمرین ۱، قیمت‌های سایه مربوط به محدودیت‌های مسئله اولیه را مشخص کرده و آن‌ها را تفسیر کنید.